Raciocínio Matemático na Aprendizagem das Funções: Um Estudo de Caso[1]

Arminda Azevedo
Escola Secundária Dr. José Afonso, Seixal

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Resumo: O presente estudo procura compreender os processos de raciocínio usados por um aluno do 10.º ano do ensino secundário na resolução de problemas e em tarefas de exploração e de investigação, com recurso à utilização da calculadora gráfica, no trabalho numa unidade de ensino sobre o tópico *Funções*. A metodologia usada é de natureza qualitativa, tendo por base o paradigma interpretativo, sendo a recolha de dados feita através de entrevistas ao aluno estudado (uma antes da unidade de ensino, outra depois), e de análise documental. Os resultados sugerem que os problemas contextualizados e as discussões e reflexões sobre as diversas tarefas contribuem para uma aprendizagem, com significado, das funções. As tarefas de exploração/investigação contribuem para desenvolver capacidades como a identificação de regularidades e a formulação, teste e justificação de conjecturas. Os relatórios escritos e as apresentações orais contribuem para o desenvolvimento das capacidades de comunicar matematicamente e de justificar processos, permitem a clarificação do pensamento intuitivo e alargam o tipo de estratégias dos alunos. Este estudo sugere, assim, que a resolução de problemas e a realização de tarefas de carácter investigativo, com recurso à calculadora gráfica, contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Palavras-Chave: Raciocínio, Funções, Representações, Resolução de problemas, Investigações, Aprendizagem, Ensino Secundário

1. Introdução

O desenvolvimento do raciocínio matemático é essencial para a compreensão dos objectos e das relações abstractas que estão na base da Matemática. É também imprescindível para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de modo a fazer face às exigências da sociedade em que vivemos e que se encontra em constante mudança, pelo desenvolvimento científico e tecnológico.

Isso mesmo é reconhecido pela generalidade dos documentos curriculares relativos ao ensino da Matemática. Por exemplo, para o NCTM (2007), “ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da Matemática” (p. 61). As normas para o desenvolvimento do Raciocínio e Demonstração incluem: (i) reconhecer o raciocínio e a demonstração como aspectos fundamentais da Matemática; (ii) formular e investigar conjecturas matemáticas; (iii) desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas; e (iv) seleccionar e usar diversos tipos de raciocínio e métodos de demonstração.

[1] Trabalho realizado no âmbito do Projecto IMLNA – Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra, apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia ao abrigo do contrato PTDC/CED/65448/2006.

Em Portugal, o programa do 10.º ano de Matemática A (ME, 2001) sublinha a importância do desenvolvimento do raciocínio e do pensamento científico por parte dos alunos, descobrindo relações entre conceitos, justificando processos de resolução, encadeando raciocínios, validando conjecturas e formulando generalizações. Este programa refere explicitamente que "no estudo das famílias de funções os estudantes podem realizar pequenas investigações" (ME, 2001, p. 29) e que estas actividades facilitam a aprendizagem, reforçando a capacidade de raciocinar logicamente, "pelas oportunidades de formular e testar conjecturas e analisar contra-exemplos, de avaliar a validade de raciocínios e de construir demonstrações" (p. 22).

Mais recentemente, o novo programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) também enfatiza o raciocínio matemático, indicando-o (a par da resolução de problemas e da comunicação matemática) como uma das capacidades transversais para a aprendizagem desta disciplina. Segundo este programa, o raciocínio matemático envolve a formulação e o teste de conjecturas, a construção de cadeias argumentativas e a demonstração. O programa refere que os alunos "devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contra-exemplo" (ME, 2007, p. 8) e "ser capazes de distinguir entre raciocínio indutivo e dedutivo e reconhecer diferentes métodos de demonstração" (idem, p. 8). Refere, ainda, que para desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente devem ser propostas "experiências que proporcionem aos alunos oportunidades que estimulem o seu pensamento" (idem, p. 30).

Desta forma, o estudo a que se refere este artigo tem por objectivo compreender os processos de raciocínio usados por alunos do 10.º ano do ensino secundário na resolução de problemas e em tarefas de exploração e de investigação no trabalho numa unidade de ensino sobre o tópico *Funções* com recurso à utilização da calculadora gráfica. O estudo incidiu nas seguintes questões de investigação:

a) Que processos de raciocínio usam e que dificuldades manifestam os alunos na resolução de problemas e na realização de tarefas de exploração/investigação, envolvendo regularidades, relações e funções, antes, durante e depois da unidade de ensino?
b) Os processos de raciocínio usados pelos alunos no fim da unidade de ensino têm relação com as experiências de aprendizagem realizadas durante a unidade?

Atendendo à complexidade dos processos envolvidos, optamos por centrar a atenção num único aluno, que é objecto de um estudo de caso.

2. Representações e raciocínio matemático

O papel das diferentes representações na aprendizagem das funções. Os diversos tipos de representação têm vindo a ocupar uma importância crescente na literatura da Didáctica da Matemática. Em particular, tem merecido crescente aceitação a ideia de que o conceito de função, para ser globalmente compreendido pelos alunos, deve ser trabalhado através das suas diferentes representações.

Segundo o NCTM (2007), “o termo *representação* refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma” (p. 75). Este documento acentua a importância da utilização de múltiplas representações na aprendizagem da Matemática, referindo, em particular que “a representação é predominante na Álgebra. Os gráficos transmitem certos tipos de informação visual, enquanto que as expressões simbólicas poderão ser mais facilmente manipuladas, analisadas e transformadas” (p. 422). Indica também que as representações facilitam o raciocínio e constituem ferramentas essenciais para as demonstrações, enfatizando a ideia que representações diferentes apoiam diferentes formas de pensar e manipular objectos matemáticos.

Kaput (1989) refere que o problema dos alunos na aprendizagem da Álgebra reside na sua dificuldade nos procedimentos com os símbolos algébricos e na falta de ligação destes com outras representações. Assim, defende que a construção do conhecimento matemático apoia-se na tradução entre sistemas de representação matemáticos, sendo essencial que exista um conhecimento sólido sobre cada forma de representação.

Pelo seu lado, Duval (2006) refere que o funcionamento cognitivo da mente humana é inseparável de uma variedade de registos semióticos de representações e, por isso, considera ser impossível aprender as noções matemáticas sem recorrer às representações. Na sua perspectiva, é a diversidade das representações que dá significado a um objecto matemático, desde que cada representação represente e descreva diferentes aspectos do objecto (Duval, 2002). As várias representações de funções apontam para aspectos diferentes do conceito, que, em conjunto, contribuem para uma representação global, razão pela qual a conversão entre as diferentes representações tem um papel determinante na compreensão e interpretação das funções. Segundo este autor, uma das maiores dificuldades da aprendizagem da Matemática é a passagem de informação de uma representação para outra, e esta dificuldade é provocada pela heterogeneidade semiótica. Considera, por consequência, que o processo de ensino-aprendizagem deve dar ênfase ao estudo das conversões entre representações, permitindo a descompartimentação de registos que constitui uma das condições para acesso à compreensão dos conceitos, em particular do conceito de função.

O problema da compartimentação dos processos de pensamento dos alunos foi explorado num estudo realizado por Elia, Panaoura, Eracleous e Gagatsis (2006). Estes autores debruçaram-se sobre a aptidão dos alunos do ensino secundário na construção de definições do conceito de função, na identificação de funções nas suas diferentes formas de representação e na resolução de problemas envolvendo funções. Procuraram, também, examinar as inter-relações entre diferentes modos de trabalhar com o conceito de função (gráficos, diagramas de setas e expressões algébricas). Os resultados revelaram as dificuldades dos alunos em dar uma definição própria do conceito de função, assim como na resolução de problemas com funções envolvendo conversões entre diversos modos de representação. Os autores interpretam estes resultados como indicando que os alunos vêem nas diferentes representações de uma função objectos matemáticos distintos e autónomos e não diferentes modos de expressar o mesmo objecto. Confirmam, desta forma, o fenómeno da compartimentação, dado que a maioria das representações de funções permanecia compartimentada e o pensamento matemático era fragmentário e monoregistal (na terminologia de Duval, 2002).

Pelo seu lado, Even (1998) realizou um estudo com alunos do ensino superior, no qual mostra que o conhecimento sobre diferentes representações de funções não é independente, mas sim interrelacionado com conhecimentos sobre as funções, o contexto apresentado e as noções subjacentes. Neste estudo foram diagnosticadas dificuldades nos alunos em relacionar diferentes representações de funções, nomeadamente no que se refere à falta de familiarização com o papel dos parâmetros em diferentes representações de famílias de funções, incluindo famílias de funções que conheciam, como as funções quadráticas. Os resultados sugerem que, para uma melhor compreensão das relações entre as representações gráfica e algébrica, os alunos devem analisar a representação gráfica de uma forma global e não apenas algumas propriedades locais. Sugerem, ainda, que a capacidade para identificar e representar o mesmo objecto em diferentes representações, movendo-se de forma flexível de uma representação para outra, desenvolve uma compreensão conceptual que fortalece a capacidade para resolver problemas.

A importância da articulação coerente das diferentes representações para a compreensão do conceito de função é sublinhada por Hitt (1998). Este autor mostra que os alunos do ensino secundário revelam dificuldades em articular algumas representações de funções, também os próprios professores de Matemática têm problemas em preservar significados num determinado contexto, na tradução de uma representação para outra. Por exemplo, na interpretação de gráficos num contexto ou na tradução de um contexto para a sua representação gráfica, os professores não conseguiram articular coerentemente os vários sistemas de representação envolvidos.

A importância das representações na aprendizagem do conceito de função é igualmente estudada por Kieran (2001) que explora o discurso e as circunstâncias em que ocorre a evolução do pensamento matemático, quando os alunos trabalham aos pares na resolução de tarefas, envolvendo a interpretação e a resolução de problemas gráficos com funções racionais. Ao analisar a interacção discursiva, social e individual, dos alunos, a autora conclui que estes, perante novas situações problemáticas, revelam algumas dificuldades na elaboração do seu pensamento emergente e na produção de representações (quer gráficas, quer simbólicas). Um outro estudo realizado por esta autora salienta a importância da representação gráfica na compreensão do conceito de função e refere que os alunos, através da visualização do gráfico de duas funções e dos seus pontos de intersecção, se tornam mais hábeis no estudo de funções lineares, nomeadamente no estudo do declive e da ordenada na origem, e conseguem fazer estimativas para as soluções de equações do tipo $2x + 7 = 9x + 4$ (Kieran, 2007).

As representações gráficas de funções têm sido o foco de diversos estudos. Por exemplo, um estudo realizado por Ponte (1984) com alunos e futuros professores do ensino secundário sugere que a interpretação de gráficos cartesianos e relação das representações gráfica e simbólica de funções podem ser fonte de muitas dificuldades para os alunos. Neste estudo foram identificadas algumas dificuldades dos alunos na leitura, construção e interpretação de gráficos, nomeadamente no que diz respeito ao uso e construção de escalas, à estimação de valores da função para determinados objectos, à representação da variação e à interpretação e discussão de relações funcionais. O autor verificou, ainda, que os alunos apresentam dificuldades na identificação das variáveis envolvidas em algumas relações funcionais, chegando a confundi-las com a taxa de variação.

Dois outros autores, Mevarech e Kramarsky (1997), realizaram um estudo com alunos do 8.º ano para analisar as suas concepções em relação à construção de gráficos. Esta análise permitiu identificar três tipos principais de concepções: (i) a construção de um gráfico inteiro como um único ponto; (ii) a construção de uma série de gráficos, que representa cada um dos factores dados e pertinentes; e (iii) a conservação da forma de uma função crescente sob todas as condições. Além disso, identificaram os seguintes tipos de erros: (i) concepção de generalizações; (ii) ideias estereotipadas de gráfico; (iii) utilização de setas ou degraus para representar a direcção da covariação; e (iv) ligação de alguns pontos por linhas ou curvas. Os autores interpretam estes resultados como mostrando falta de ligação entre as representações verbal e gráfica (presentes nas tarefas propostas).

Friedlander e Tabach (2001) descrevem as vantagens e desvantagens da utilização de diversos tipos de representação na aprendizagem da Álgebra. Assim, a representação *verbal* é utilizada para apresentar um problema e revela-se de extrema utilidade para a interpretação das respostas, enfatizando a importância da comunicação verbal como ferramenta para a resolução de problemas. Contudo, a linguagem verbal pode ser ambígua e induzir a associações irrelevantes ou erradas, tornando-se num obstáculo na comunicação matemática. A representação *numérica* é, normalmente, utilizada como introdução a outro tipo de representação, sendo uma mais-valia para um primeiro contacto com a interpretação de um problema e na investigação de casos particulares. No entanto, a falta de generalização pode ser uma desvantagem para a compreensão do problema no seu todo. A representação *gráfica* é essencial, na medida em que permite "retratar" uma função. O estudo dos gráficos é intuitivo e apela ao sentido visual dos alunos. As representações gráficas podem, no entanto, induzir interpretações erradas, uma vez que representam apenas uma parte do gráfico da função em estudo. Finalmente, a representação *algébrica* é fundamental na representação de padrões e modelos matemáticos. A manipulação de objectos algébricos é, por vezes, o método mais eficaz para justificar ou demonstrar generalizações. Porém, o uso exclusivo de símbolos algébricos pode criar obstáculos à compreensão dos significados matemáticos e provocar dificuldades na interpretação das respostas aos problemas. Segundo estes autores, tendo em conta que a utilização das diferentes representações apresenta vantagens e desvantagens, estas devem ser usadas e combinadas de forma a propiciarem ferramentas eficazes para a aprendizagem dos objectos matemáticos, nomeadamente das funções.

Concluímos, assim, que na aprendizagem das funções é fundamental proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que promovam a manipulação de certas características das suas diferentes representações, por exemplo, os diferentes parâmetros na representação simbólica; ou a translação, dilatação, contracção e simetria da sua representação gráfica. No trabalho com as diferentes representações de funções, devem ser propostas aos alunos tarefas que realcem a utilidade de cada representação. Dependendo da informação que se procura poderá ser mais vantajoso utilizar uma tabela, um gráfico ou uma expressão algébrica, de modo a evidenciar as características que se procuram. Para que os alunos compreendam o conceito de função na sua globalidade deve, ainda, ser enfatizada a conversão entre as suas diferentes representações.

Raciocínio matemático. Pólya (1954) refere que a Matemática é o domínio do conhecimento em que se usa o raciocínio dedutivo, nomeadamente nas demonstrações matemáticas. No entanto, destaca igualmente a importância do raciocínio indutivo como um caso particular do raciocínio plausível que está presente na actividade criadora dos matemáticos. Para este autor, a indução está associada ao método experimental usado pelos cientistas, cuja primeira etapa é a observação, seguindo-se a formulação e o teste de conjecturas. Indica que, à medida que a conjectura resiste aos testes, torna-se mais credível, mas salienta que existe sempre a possibilidade da indução conduzir ao erro. Defende que os raciocínios dedutivo e indutivo são complementares, razão pela qual devem estar presentes na sala de aula e ser ensinados em paralelo.

Analisando o raciocínio matemático de um ponto de vista essencialmente psicológico, Sternberg (1999) refere que este requer não só pensamento analítico, mas também pensamento criativo e prático. Na sua perspectiva, alguns dos processos metacognitivos envolvidos no raciocínio matemático incluem: (i) a identificação da natureza do problema; (ii) a formulação de uma estratégia para resolver o problema; (iii) a representação mental do problema; (iv) a procura de recursos que conduzam à solução do problema; e (v) a verificação da solução.

Para o NCTM (2007), o raciocínio matemático deve ser desenvolvido dando oportunidades aos alunos de explorar, investigar, representar, conjecturar, explicar e justificar matematicamente. Para este documento, os alunos desenvolvem o seu raciocínio matemático, em particular o raciocínio indutivo e dedutivo, através dos processos de identificação de regularidades, formulação e verificação de conjecturas, generalização, justificação de propriedades, elaboração de cadeias de raciocínio e argumentação em defesa de um processo de resolução e demonstração.

Russel (1999) define raciocínio como "aquilo que utilizamos para pensar sobre as propriedades dos objectos matemáticos e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objectos" (p. 1). Esta autora aponta quatro aspectos do raciocínio matemático que ocorre nos primeiros anos de aprendizagem da Matemática: (i) respeita essencialmente ao desenvolvimento, justificação e uso de generalizações matemáticas;

(ii) conduz a uma cadeia de conhecimentos matemáticos num determinado domínio; (iii) o desenvolvimento de uma certa cadeia de compreensões matemáticas dá origem a uma "memória matemática", por vezes designada por "sentido matemático", e providencia as bases para a resolução de problemas matemáticos; e (iv) a ênfase no raciocínio matemático na sala de aula constitui o caminho para o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Pelo seu lado, Fonseca (2000) analisou os processos matemáticos por utilizados por alunos do 10.º ano na realização de tarefas de investigação na aula de Matemática e, também, o discurso envolvido em aulas de investigação. Os resultados mostraram que os alunos utilizaram de uma forma idêntica os processos de especialização, procura de regularidades, formulação de conjecturas, verificação e generalização. Para a autora, o processo de formulação de conjecturas é aquele que surge com maior frequência e de uma forma mais espontânea, enquanto os processos de justificação e de demonstração são utilizados de formas distintas e estão menos presentes no trabalho dos alunos. Refere ainda que existem diversos factores que podem influenciar a utilização de certos processos, nomeadamente a natureza das tarefas, o material disponível, a interacção com os colegas e com o professor e o conhecimento ou experiência prévios.

3. Metodologia

Metodologia de investigação. A metodologia usada neste estudo é de natureza qualitativa, tendo por base o paradigma interpretativo e seguindo a modalidade de estudo de caso. Os participantes são alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologia. O presente artigo analisa os processos de raciocínio utilizados, antes e depois da unidade de ensino, por António, um aluno que revelou muito bom desempenho. Este aluno tem 15 anos, é natural de Lisboa e vive com os pais cujas habilitações não ultrapassam o ensino secundário. Frequenta a escola actual desde o 7.º ano e não apresenta nenhuma retenção no seu percurso escolar, destacando a Matemática como uma das suas disciplinas preferidas, a par da Física, da Química e da Educação Física.

Para a recolha de dados foram utilizadas duas entrevistas clínicas (uma antes e outra depois da unidade de ensino), de modo a obter um melhor conhecimento acerca das estratégias dos alunos na resolução de algumas tarefas propostas. O processo de análise de dados foi iniciado na sequência das primeiras entrevistas, visando sobretudo o planeamento das segundas entrevistas. Pela natureza do estudo, a análise de dados assumiu um carácter essencialmente descritivo e interpretativo, procurando relações entre os dados específicos constituídos pelos diferentes materiais obtidos, numa perspectiva indutiva, sem a finalidade de provar hipóteses previamente formuladas.

Considerando o objectivo deste estudo e tendo em conta alguns aspectos da revisão de literatura, consideramos as seguintes categorias de análise: (i) estabelecimento de relações entre objectos (analisando aspectos como a interpretação e compreensão dos problemas e o trabalho com as diferentes representações de funções, bem como a conversão entre elas); (ii) formulação e aplicação de estratégias de resolução de problemas (analisando também a verificação das soluções obtidas); e (iii) identificação de regularidades, formulação, teste e justificação de conjecturas.

Unidade de ensino. A unidade de ensino a que se refere este estudo é subordinada ao tema *Funções* (10.º ano), do programa de Matemática A (ME, 2001). Na sua planificação, para além dos objectivos e indicações metodológicas presentes no referido programa, foram tidas em consideração as orientações curriculares constantes na brochura sobre Funções (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 1997) e também as recomendações das *Normas* do NCTM (2007).

Assim, a planificação desta unidade inclui algumas tarefas de carácter investigativo nas subunidades do tema: generalidades sobre funções, função quadrática, função módulo, funções polinomiais de grau superior a dois. As tarefas propostas visam proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem significativas para o desenvolvimento do raciocínio matemático, promovendo o trabalho em pequenos grupos e a discussão na turma.

Considerando a importância da diversificação de tarefas na gestão curricular e na aprendizagem e visando a consolidação de conhecimentos adquiridos, a planificação inclui igualmente exercícios e problemas retirados do manual escolar adoptado pela escola. Os exercícios e problemas escolhidos são de diferentes níveis de dificuldade, permitindo que os alunos ponham em prática os conhecimentos que vão adquirindo e conduzindo a uma melhor compreensão dos conceitos. Nesta selecção também é tido em conta o contexto dos problemas, uma vez que em situações reais os alunos podem dar um significado às ferramentas matemáticas que estão a aprender. Assim, a planificação está estruturada tal como indica o anexo 1, assumindo-se que o conjunto das diferentes tarefas seleccionadas poderá desempenhar um papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

4. Processos de raciocínio de António antes da unidade de ensino

4.1. Relações entre objectos

Para compreender como António estabelece relações entre objectos começamos por abordar o modo como interpreta e compreende problemas envolvendo funções e de seguida analisamos o modo como usa diversas representações, tanto no que se refere às estruturas matemáticas, como na relação com o contexto dos problemas.

Interpretação e compreensão de problemas. António revela boa capacidade para interpretar problemas em que as funções estão representadas graficamente. É o que acontece na questão 1., na qual os gráficos apresentados traduzem a distância percorrida em função do tempo:

> O primeiro é ver qual é a distância a que está a escola, que é 3000m, pelo gráfico. [pausa para leitura da questão seguinte] A ida para a escola de cada um deles tem a ver com o tempo que demora. Por isso, o que demora mais tempo foi a pé, o que demora menos tempo foi de mota e o intermédio foi de bicicleta. Tem a ver com a velocidade.

O aluno consegue, também, identificar as situações representadas graficamente como sendo de proporcionalidade directa:

> **Professora:** Achas que estas relações são de proporcionalidade directa?
> **António:** Sim, porque se aumenta o tempo aumenta a distância também, por isso é uma proporcionalidade directa.

António mostra alguma dificuldade em relacionar alguns objectos matemáticos mais abstractos com o significado que assumem no contexto dos problemas e, em particular, dificuldades na interpretação de aspectos das funções lineares (constante de proporcionalidade, propriedades da representação gráfica). Assim, na questão 2.3 em que é solicitada uma expressão que relacione as duas variáveis representadas numericamente, o aluno escreve uma relação correcta que traduz a situação em causa. No entanto, mostra não compreender o que significa "escrever uma variável em função de outra":

> **Professora:** Hum, hum. Então e uma expressão que permita obter um em função do outro, *q* em função de *n*.
> [O aluno pensa]

Professora: Como é que fizeste os cálculos para o preenchimento da tabela?
António: Foi com a razão…
Professora: E como é que calculaste a razão?
António: Fiz um vezes o outro… Pode ser essa a expressão?
Professora: O que é que tu achas?
António: Eu acho que sim… Tem que ser sempre duas expressões… Tem que se acrescentar mais uma [escreve rapidamente e passa à questão seguinte].
Professora: O que é que escreveste?
António: A razão igual a um vezes o outro…

2.3- $q \times n = r$

Na questão 4., quando vê uma função representada algebricamente, relaciona pela primeira vez a tarefa que está a realizar com funções, o que indicia dificuldades no trabalho com expressões algébricas:

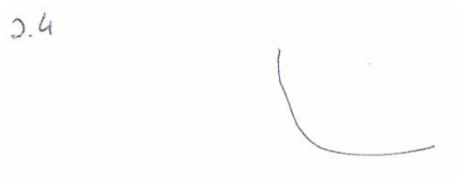
António: Porque não sei se me lembro.
Professora: Mas já falaste nisto?
António: Já.
Professora: Então e de que é que não te lembras?
António: É das funções, mesmo, mas acho que não é muito difícil. A primeira acho que sei fazer. Se o ponto de abcissa é 3, é substituir o *x* por 3 [e escreve] dá 8. O aspecto gráfico é uma linha recta, mas sem passar no centro do gráfico.

Na justificação que apresenta para esta questão, António parece compreender a influência do valor 2 no aspecto gráfico da função:

Professora: Porquê?
António: É uma linha recta, porque… Isso é que não me lembro muito bem… Ah! É porque é uma proporcionalidade directa, se aumentar um aumenta o outro também. Se aumentar o eixo dos *x* também aumenta o *y*, logo é uma linha recta. Não passa no centro, porque tem mais 2, por isso acrescenta-se sempre mais 2 e por isso sobe [e faz o desenho no ar].

Assim, António relaciona uma relação de proporcionalidade directa com uma recta, mas parece pensar que qualquer recta representa uma relação deste tipo.

Uso de representações. No trabalho com as representações gráfica, verbal e numérica de funções, António demonstra estar à vontade. Na resposta à questão 2.4, interpreta de forma correcta uma função representada verbalmente e apresenta o seguinte esboço de gráfico para a representação da situação:



No entanto, António revela alguma dificuldade em lidar e compreender o significado de expressões algébricas. Assim, por exemplo, na questão 1.4 em que é solicitada uma expressão que relacione as duas variáveis representadas graficamente, mostra alguma hesitação e acaba por escrever uma expressão que dá a velocidade média:

> **Professora:** Então e o que é que estás a pensar? Diz-me lá.
> **António:** Estou a pensar pôr 300*d* é igual a 30*d*… Ou então fazer uma coisa que dei a Físico-Química que é a velocidade média… A distância a dividir pelo intervalo de tempo.
> **Professora:** E de onde vem a ideia de 300*d*?
> **António:** É 300 metros pelo intervalo de tempo…

1.4- $v_m = \frac{d}{t} \Leftrightarrow v_m = \frac{3000m}{30min}$

Síntese. Deste modo, antes da unidade de ensino, António já revela capacidade para interpretar e compreender problemas que podem ser traduzidos por funções. Relaciona com facilidade as situações apresentadas com o contexto dos problemas, nomeadamente indicando a velocidade num gráfico envolvendo distâncias percorridas e tempo. No entanto, não consegue identificar a velocidade como sendo a constante de uma relação directamente proporcional. Apresenta, ainda, alguma facilidade em relacionar os diferentes tipos de representação de funções. Além disso, relaciona uma relação de proporcionalidade directa com uma recta, mas parece pensar que qualquer recta representa uma relação deste tipo. Manifesta, ainda, dificuldades no trabalho com expressões algébricas.

4.2. Resolução de problemas

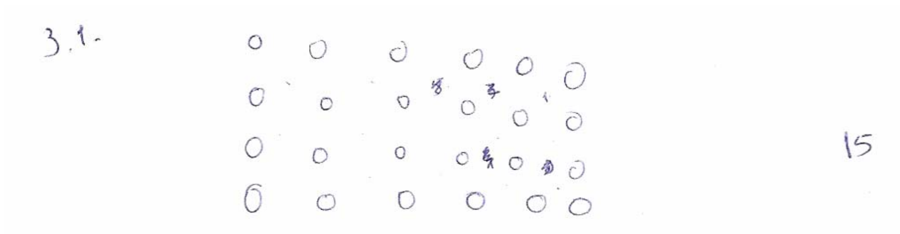
Analisamos o modo como o aluno raciocina na resolução de problemas verificando como define e aplica de estratégias de resolução de problemas com funções e como verifica as soluções obtidas e reflecte sobre elas.

Definição e aplicação de estratégias de resolução de problemas. António apresenta facilidade em definir uma estratégia para resolver os problemas propostos, bem como para realizar os cálculos necessários para a aplicação da estratégia. Na questão 2.1, por exemplo, consegue preencher correctamente a tabela que a representa, utilizando a estratégia de calcular o produto constante e dividi-lo pelos vários valores apresentados na tabela que se pede para completar:

n	2	3	5	10	12
q	18 €	12 €	7,2 €	3,60 €	3

Na questão 3.1., que envolve a procura de regularidades, António recorre a uma representação visual, sob a forma de desenho. Após a análise das figuras apresentadas, esboça um esquema que lhe permita contar o número de caramelos pedidos:

Aqui vou tentar fazer um esboço de como seria a caixa e depois conto.



Verificação das soluções obtidas. Na questão 2., anteriormente referida, António identifica rapidamente a situação de proporcionalidade inversa. Contudo, na sua justificação revela pouca preocupação em verificar as soluções obtidas e em reflectir sobre elas:

É a relação da proporcionalidade inversa... É um vezes o outro, que dá a razão que é 36, e depois é dividir pelos factores.

Síntese. Deste modo, António mostra facilidade em definir estratégias para resolver problemas com funções. Na primeira entrevista usa estratégias de procura de regularidades, através da identificação do produto constante na proporcionalidade inversa e de simetrias em figuras, e não apresenta dificuldades na aplicação destas estratégias, realizando com fluência os cálculos necessários. No entanto, não mostra preocupação em verificar as soluções obtidas nem em reflectir sobre elas.

4.3. Investigações

Procuramos estudar os processos de raciocínio de António na realização de investigações verificando como identifica regularidades, como formula e testa conjecturas e como as justifica.

Identificação de regularidades e formulação e teste de conjecturas. Na questão 3.1., que envolve a procura de regularidades, António procura encontrar uma lei que lhe permita determinar o número de caramelos existentes numa caixa, qualquer que seja o número de chocolates. O aluno repara que os caramelos estão distribuídos num padrão rectangular, utilizando o número de chocolates para determinar o número de caramelos. E para verificar a resposta que deu na questão 3.1., tenta generalizar a regularidade que encontrou formulando uma conjectura:

> Sim dá… Acho que está certo… Porque se diminuir 1 a cada lado pode-se multiplicar e… [Pensa] dá, dá sempre, por exemplo aqui se fosse 2 por 4 deve dar 8, porque se encontra no meio…

Esta conjectura foi formulada a partir da exploração dos casos particulares apresentados na questão 3., nos quais António verifica a existência de regularidades. Após a sua formulação, testa-a para mais alguns casos e, ao verificar que é válida nesses casos, aceita-a como verdadeira. Deste modo, mostra facilidade em identificar regularidades, formular e testar conjecturas.

Justificação de conjecturas. Ao formular uma determinada conjectura, preocupa-se em testá-la para alguns casos, mas não se preocupa em justificá-la. No entanto, ainda na questão 3.1., quando directamente questionado, consegue uma explicação aceitável:

> **Professora:** Como? Podias explicar melhor?
> **António:** Se eu diminuir 1 a cada lado, porque aqui é sempre 1 vezes 1, tiro um a cada um dá 1, nesta 1 vezes 3 dá 3, aqui é 2 vezes 4 e aqui é 3 vezes 5, que dá 15 e dá sempre essa razão… Ah! Isso é a pergunta seguinte…
> **Professora:** Exactamente, é pedido um método para encontrar o número de caramelos quaisquer que sejam as dimensões da caixa. E tu já encontraste um, não é?
> **António:** Sim é (x-1) vezes (y-1).
> **Professora:** Em que o x e o y são?...
> **António:** O x é a largura e o y é o comprimento.

Deste modo, António só apresenta a sua justificação das suas conjecturas quando solicitado, apresentando então alguma facilidade.

Síntese. António explora com facilidade casos particulares, procurando encontrar regularidades. Além disso, define, com alguma destreza, estratégias para testar as suas conjecturas. Revela ser capaz de generalizar as regularidades que encontra e justificar as conjecturas que formula, mas não sente directamente essa necessidade, apenas o fazendo quando lhe é pedido explicitamente.

5. Processos de raciocínio de António depois da unidade de ensino

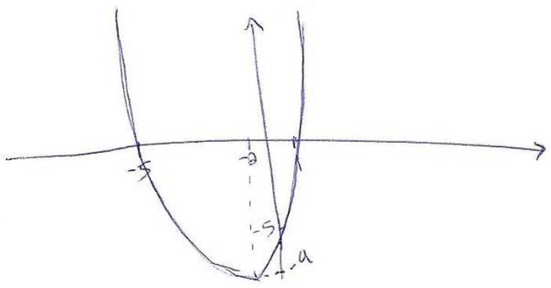
5.1. Relações entre objectos

Depois da realização da unidade de ensino, procuramos verificar de que modo António raciocina, estabelecendo relações entre objectos matemáticos.

Interpretação e compreensão de problemas. Na questão 1.1, na qual é dada uma representação algébrica de uma função quadrática e é solicitada a sua representação gráfica, António recorre à calculadora gráfica e interpreta de forma correcta os dados que obtém. Para fazer o esboço do gráfico no papel tem a preocupação de procurar pontos relevantes, como é o caso dos zeros, do vértice da parábola e do ponto de intersecção com o eixo dos *yy*:

> Vou introduzir a expressão na calculadora e vou ver… A primeira é uma parábola. Um dos zeros é 1 e outro é -5. [Continua a analisar o gráfico obtido na calculadora] E a intersecção com os *yy* é -5 também. [Desenha o esboço de acordo com esses valores que viu na calculadora] Ainda me falta ver qual é o mínimo. [Recorre à calculadora e escreve].

1.1



António revela, também, boa capacidade para interpretar problemas contextualizados em que as funções estão representadas verbalmente. Na questão 2.2., apesar de já conhecer a expressão algébrica que representa a situação apresentada, identifica os valores que a variável independente pode tomar no contexto do problema apresentado, mostrando compreender o seu significado nesse contexto, ou seja, em termos geométricos:

> **António:** Em relação aos valores que o *x* pode tomar… [Pensa] No máximo pode tomar 8.
> **Professora:** Porquê?
> **António:** E não pode chegar a 8… Nem a zero, porque o rectângulo ficava uma linha. Por isso, o *x* vai pertencer a um intervalo aberto entre zero e oito. [Escreve]

2.2- x pod tomar valores entre $]0;8[$

Uso de representações. António mostra um bom desempenho no trabalho com as representações algébrica e gráfica de funções, bem como na conversão da representação algébrica para a gráfica. Na questão referida no exemplo anterior, apesar de recorrer à calculadora gráfica para obter o gráfico da função, revela compreender o significado dos valores que constituem a expressão algébrica e, revela, também, interpreta adequadamente os dados que obtém. Esta situação é evidenciada na questão 1.2, na qual relaciona os dados que obteve anteriormente com a expressão algébrica dada, interpretando de forma correcta o significado dos zeros da função dada e estabelecendo a sua relação com a expressão algébrica:

> Agora, sobre o significado, o 1 e o -5 são os zeros da parábola, mas o sinal é sempre ao contrário, quando aqui está -1, o zero é 1 e quando aqui está + 5 o zero é -5. (…)

1.2- $(x-1)$ ↳ zero $= 1$ $\quad$ $(x+5)$ ↳ zero $= -5$

Síntese. António revela aptidão para trabalhar com várias formas de representação de função, nomeadamente algébrica, gráfica e verbal. Relaciona com alguma destreza as várias formas de representação, convertendo-as e compreendendo o significado dos valores que constituem a expressão com os pontos relevantes do gráfico. Apresenta, também, facilidade em interpretar e compreender problemas que envolvem funções, estabelecendo relação com o significado que tomam no seu contexto. Revela uma boa compressão dos conceitos inerentes ao estudo das funções e da sua ligação com as representações algébrica e gráfica.

5.2. Resolução de problemas

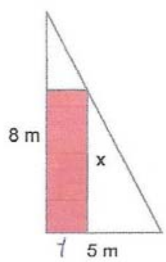
Analisamos agora como, depois da realização da unidade de ensino, António define e aplica estratégias de resolução de problemas e verifica os resultados obtidos.

Definição e aplicação de estratégias de resolução de problemas. António define com facilidade estratégias para resolver os problemas propostos. Na questão 1.5, em que é solicitada a expressão algébrica de várias representações gráficas de funções quadráticas, recorre à família de funções quadráticas. Identifica o valor do vértice da parábola e utiliza a expressão $a\ (x - h)^2 + k$, mostrando destreza na conversão da representação gráfica para a algébrica. Identifica graficamente os valores do vértice que identifica com os respectivos parâmetros na expressão algébrica. Para o parâmetro *a* opta por realizar várias tentativas na calculadora gráfica, atribuindo-lhe valores e verificando se o gráfico obtido coincide com o dado:

> Vou utilizar a fórmula $a\ (x - h)^2 + k$. Vejo qual é o vértice e depois logo vou ver qual é o *a*. [Faz experiências na calculadora, escreve uma expressão e continua a utilizar a calculadora]. Agora vou experimentar com o *a* igual a 1 e depois vejo se é preciso alterar. [Experimenta na calculadora] Dá…

Na questão 2.1. que solicita uma expressão algébrica relativa à área de uma figura geométrica, António recorre ao modelo da proporcionalidade, utilizando a semelhança de triângulos. Identifica triângulos semelhantes na figura e, embora numa primeira fase mostre alguma hesitação, acaba por encontrar uma relação correcta da proporção entre os lados correspondentes dos triângulos semelhantes:

> Estou a pensar na razão de semelhança entre os triângulos… [Continua a pensar] Estou a ficar com duas variáveis… [Pensa e escreve]



Ao escrever a relação que encontrou, verifica que nenhuma das duas variáveis que está a utilizar corresponde à área do rectângulo. Estabelece, de imediato, uma relação entre a área do rectângulo e as variáveis que tem, que correspondem à largura e ao comprimento do rectângulo dado:

> Um dos lados do triângulo maior a dividir pelo outro vai ser semelhante ao *x*, que é um dos lados do triângulo menor, a dividir pelo 5 - *y*, que é a outra variável que eu pus. Neste caso o *x* é um dos lados do rectângulo e o *y* é o outro lado. [Pensa] Só que agora não sei se consigo chegar a esta expressão… Vou tentar… Eu aqui tenho duas variáveis, mas nenhuma é a área, por isso tenho que fazer aqui um à parte em que *x* vezes *y* á igual à área. Então *y* é igual a *A(x)* a dividir por *x*… [Pensa] E posso tentar substituir o *y* por isto… Só que não sei se [pensa] eu vou substituir… [Escreve]. Vou simplificar a expressão. [Escreve e a determinada altura pára e olha para a expressão] (…)

2.1

$$\cancel{\frac{8}{5} = \frac{x}{5-y}}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{x}{5-y} \Leftrightarrow \qquad x \cdot y = A(x)$$

$$\Leftrightarrow 5x = 40 - 8y \Leftrightarrow \qquad y = \frac{A(x)}{x}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 40 - \frac{8A(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8A(x)}{x} = 5x - 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8(Ax) = (5x - 40)x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8A(x) = 5x^2 - 40x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x) = -\frac{5x^2}{8} + \frac{40x}{8}$$

Deste modo, António consegue encontrar uma expressão que representa a área pedida, mas, como não coincide com a expressão que lhe é fornecida, utiliza uma estratégia de transformação simultânea de expressões, simplificando a expressão inicial e verificando que é igual àquela a que chegou:

> **António:** (…) Agora não sei se é melhor simplificar esta expressão ou se é melhor deixar assim… Posso simplificar esta? [Aponta para a inicial].
> **Professora:** Podes fazer como quiseres…
> **António:** Então… [Pensa]. Aqui tenho um caso notável, há valores muito semelhantes… [Pensa] Se calhar vou simplificar a primeira e ver se dá esta. [Escreve] Já cheguei à mesma expressão.

$$A(x) = 10 - \frac{5}{8}(x-4)^2 \Leftrightarrow A(x) = 10 - \frac{5}{8}(x^2 - 8x + 16) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x) = 10 - \frac{5x^2}{8} + \frac{40x}{8} - \frac{80}{8} \Leftrightarrow \boxed{A(x) = -\frac{5x^2}{3} + \frac{40x}{3}}$$

Os cálculos que realiza na resolução desta questão revelam destreza na manipulação de expressões algébricas.

Na questão 2.3, na qual é pedido o valor do rectângulo de área máxima, António utiliza uma estratégia de resolução gráfica. Converte a representação algébrica da função que define a área do rectângulo numa representação gráfica, utilizando a calculadora gráfica:

> Para saber qual o rectângulo de área máxima, vou pôr a expressão na calculadora e ver, dentro dos valores possíveis que o *x* pode tomar, qual é o que dá a maior área. [Utiliza a calculadora]

Ao analisar o gráfico obtido na calculadora gráfica, o aluno verifica que o máximo da função coincide com o valor pedido. Perante esta situação mostra reflexão na sua resposta e tenta encontrar uma justificação para que isso aconteça, analisando que os extremos do intervalo que correspondem aos valores possíveis da variável em causa coincidem com os zeros da função:

> Neste caso é mesmo o máximo da função que corresponde à área máxima, porque pertence ao intervalo… [Pensa] Faz sentido, porque este intervalo coincide com os zeros da função… A maior área é $10m^2$. E essa área é quando *x* é igual a 4 e agora o *y* há-de ser 10 a dividir por 4. [Escreve e pensa]

2.3 - Maior área = $10\ m^2$

quando : $x = 4$

$$y = \frac{10}{4} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$$

Na questão 2.4. é pedido o intervalo de valores para os quais a área é superior a 8. O aluno define com facilidade a estratégia de resolução gráfica de inequações. Recorre à calculadora gráfica, introduzindo a função *y* = 8 em simultâneo com a função que já lá tinha, que definia a área dos rectângulos. Determina, então, graficamente os pontos de intersecção das duas funções:

> Vou pôr na calculadora uma função com 8, para fazer uma linha, e a partir dessa linha para cima tem área superior a 8 metros e depois vou ver os pontos de intersecção. (…)

Na questão 3. são apresentadas várias representações gráficas e é solicitada uma expressão que as defina algebricamente. Na sua resolução António, recorre à estratégia de usar a família de funções polinomiais, utilizando o teorema fundamental da Álgebra. Nas três primeiras representações é possível identificar graficamente o valor exacto dos zeros das funções. O aluno identifica-os e aplica com facilidade a estratégia definida:

> Vou ver os zeros e usar o teorema fundamental. O primeiro zero é -3, por isso vou por (x + 3), o segundo zero é duplo e é o zero, por isso vou por x ao quadrado e o outro é 3, por isso (x – 3)… Vou experimentar assim, com o *a* igual a 1 [Introduz na calculadora e confirma] Dá mesmo igual. [Escreve]

1º $\quad a(x-b)(x-c)$

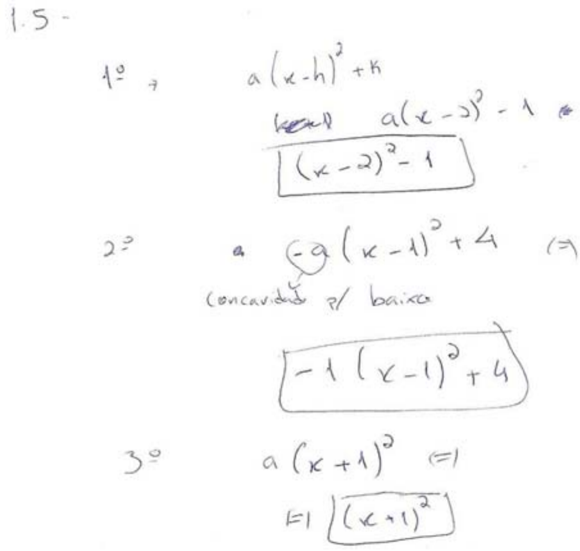
$$a(x+3)(x^2)(x-3) = \boxed{x^2(x+3)(x-3)}$$

Verificação das soluções obtidas. Ao encontrar uma expressão cuja representação gráfica lhe parece coincidir com a dada, mostra preocupação em verificar que os pontos relevantes são, de facto, os mesmos:

> **Professora:** O que é que verificaste?
> **António:** Estive a verificar os zeros, o mínimo e a intersecção com os *yy*.

Na questão 1.5, em que o aluno segue a mesma estratégia (recurso à família de funções quadráticas) para todas as funções representadas, à medida que vai utilizando a calculadora gráfica, revela preocupação em justificar as suas opções:

> Agora neste vou fazer o mesmo processo. Primeiro vou ver o vértice da parábola. [Utiliza a calculadora]. A concavidade está voltada para baixo e o *a* é negativo. Vou experimentar -1… [Experimenta na calculadora] Dá. Os zeros são -1 e 3, também confirmam… Agora nesta não há *k*, porque é zero, por isso era mais zero… [Experimenta na calculadora] O *a* também é 1. É só x + 1 ao quadrado. O zero é duplo e é -1 e a intersecção com os *yy* é 1.



Em todas as questões o aluno mostra reflectir sobre a sua resposta, tentando justificá-la e revelando preocupação em verificar a solução obtida:

Professora: O que é que está a pensar?
António: Estava a confirmar se estava certo… Sim está.
Professora: Como é que confirmaste?
António: Multipliquei um pelo outro e dava dez. (…)

Síntese. Depois da unidade de ensino, António revela ser capaz de definir com facilidade estratégias para resolver problemas com funções utilizando estratégias como: (i) recurso a famílias de funções quadráticas, interpretando os vários aspectos das respectivas expressões algébricas; (ii) uso do modelo da proporcionalidade, para identificar relações em figuras geométricas; (iii) manipulação algébrica, com transformação simultânea de expressões; (iv) representação e resolução gráfica de funções e inequações dadas algebricamente; e (v) por tentativas, fazendo variar elementos de representações algébricas. O aluno apresenta, também, facilidade em aplicar a estratégia que define, revelando um bom desempenho nos cálculos necessários, no trabalho com as expressões algébricas e na utilização da calculadora gráfica. Mostra, ainda, alguma preocupação em justificar a estratégia definida e em reflectir nas respostas que vai encontrando.

5.3. Investigações

Por fim, analisamos o modo como, após a realização da unidade de ensino, António identifica regularidades, formula e testa conjecturas, bem como as justifica.

Identificação de regularidades e formulação e teste de conjecturas. Na situação descrita na questão 1.2., ao analisar o significado dos valores 1 e -5, António formula uma conjectura:

> E não sei se o 5 também não tem a ver com a intersecção com os *yy*… Vou ter que experimentar noutras funções para ver se dá… [Utiliza a calculadora].

Além disso, mostra preocupação em testar a sua conjectura, realizando experiências para mais casos particulares:

> **Professora:** O que é o que estás a experimentar?
> **António:** Estou a ver com $x + 4$… E dá. O valor do primeiro factor, neste caso $x - 1$, dá um zero que é 1 e o outro, $x + 4$, dá outro zero que é - 4 e é também o valor da intersecção com os *yy*.
> **Professora:** E se os zeros fossem outros, será que se mantinha essa situação?
> **António:** Talvez não… [Experimenta na calculadora] Já não se mantinha, por exemplo se aqui [apontando para x -1] fosse 2 duplicava, dava -10. [Continua a experimentar] Mas, se fosse aqui $x - 1$ dava sempre a intersecção com os *yy*. [Escreve]

Verificação de conjecturas. Ao tentar encontrar uma justificação para a regularidade encontrada no exemplo anterior, António formula uma generalização quando verifica que o valor da intersecção do gráfico das funções com o eixo dos *yy* é igual a um dos zeros, porque o outro zero é 1. Quando começa a mudar esse valor verifica que a intersecção com o eixo dos *yy* é igual ao produto dos zeros da função, estabelecendo assim uma generalização da sua conjectura inicial:

> **Professora:** Então qual seria, em qualquer função, a intersecção com os *yy*?
> **António:** Ia ser um vezes o outro… Era o produtos dos zeros. [Escreve]

Intersecção c/ os yy → Produto dos Zeros $(1 \times (-5))$

A conjectura formulada nesta questão tem uma importância significativa em termos matemáticos, revelando, além disso, o desenvolvimento da sua aptidão para relacionar as representações algébrica e gráfica de funções.

Na questão 1.3., uma pequena investigação sobre a influência do parâmetro *a* no gráfico das funções da família $y = (x - a)(x + 1)$, António explora alguns casos particulares, atribuindo valores ao parâmetro *a*. Na sua investigação, o aluno identifica regularidades relacionadas com os valores dos zeros e com o ponto de intersecção com o eixo dos *yy*. E, em cada caso que testa, mostra preocupação em confirmar a conjectura anteriormente formulada:

> Aqui para investigar os gráficos das funções vou experimentar substituir o *a* por 2… [Faz experiências na calculadora] Agora vou por 3. Portanto o *a* continua a ser um dos zeros. Quando o *a* é 2, os zeros são -1 e -2. Quando o *a* é 3, os zeros são o -1 e o -3. Ou seja, o *a* tem a ver com os zeros e acho que tem a ver com a intersecção com os *yy*. Deixe ver… [Experimenta] Sim, dá. A intersecção com os *yy* é outra vez o produto dos zeros. É *a* vezes -1. [Escreve]

O aluno identifica claramente quais os valores que poderiam alterar o comportamento gráfico da família de funções dada, aproveitando todos os testes que realiza para confirmar e justificar a conclusão a que chegou anteriormente.

> **Professora:** Quais os valores que experimentastes?
> **António:** Dei valores positivos e negativos… [Pensa] Mas também pode tomar o valor 1 ou zero. Se for zero, um dos zeros é zero e o outro é -1. E a intersecção com os *yy* fica zero, porque zero vezes -1 dá zero [Confirma na calculadora].
> **Professora:** E se o *a* for 1?
> **António:** Aí há um zero duplo e confirma-se a intersecção com os *yy*, que é 1.

1.3- $a \rightarrow$ dá um dos zeros da parábola
$-1 \rightarrow$ é o outro zero da parábola.
$a \times (-1) \rightarrow$ intersecção c/ os yy.
Exemplos que testei: $(x+3)(x+1)$
$(x-3)(x+1)$

Mais uma vez, as conjecturas que António formula são significativas. Uma vez que o aluno já conhecia a identificação dos zeros das investigações realizadas na aula, neste caso, o aspecto mais interessante do seu raciocínio, está na identificação da intersecção do gráfico com o eixo dos *yy* como sendo o produto dos zeros da função.

Na questão 2.4., quando procura na calculadora gráfica o primeiro ponto de intersecção entre as funções dadas, António formula uma conjectura sobre o segundo ponto de intersecção. Fundamenta a sua conjectura com base em regularidades que encontrou na resolução de problemas durante as aulas e procura uma justificação plausível:

> Para que a área não seja inferior pode ter esse valor 2,21 (aproximado) e o outro acho que é 5,79. [Verifica na calculadora, encontrando o segundo ponto de intersecção entre as duas funções] É. Porque é a soma. Não sei porquê, mas já de outra vez me apercebi disso… Talvez pela simetria da parábola…

$2.4 \quad x \to [2{,}21\,;\,5{,}79]$

A conjectura de António revela uma analogia com situações com que se deparou durante as aulas e é indicadora da sua capacidade para identificar regularidades. No entanto, na justificação que apresenta poderia ir um pouco mais longe.

No 3.º gráfico da questão 3, formula uma conjectura sobre o valor do parâmetro *a*:

> Agora acho que vejo já aqui que o *a* tem que ser negativo, porque a função vem de baixo, está ao contrário das outras. Os zeros são -3, -2, 1,2 e 3 e vou experimentar pôr o *a* com o valor -1.

Ao realizar esta experiência, refuta de imediato a conjectura formulada. Nessa altura revela alguma reflexão e preocupação em justificar quer a razão da sua conjectura, quer a razão da sua refutação:

> **António:** [Experimenta] Afinal aquilo que eu disse do menos não se verifica, porque é ao contrário. Talvez seja por ser uma função do 5.º grau. Se calhar o que disse não se aplica nestas funções, por ser de grau ímpar… [Pensa]
> **Professora:** Porque é que tinhas dito isso?
> **António:** Porque nas outras dava sempre positivo e como esta estava ao contrário. Mas vendo bem, estas são de grau par e esta é de grau ímpar, por isso é diferente… Já experimentei e o *a* é 1. [Escreve]

3.º $a(x+3)(x+2)(x-1)(x-2)(x-3) = \boxed{(x+3)(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)}$

A questão que levanta é significativa, pois o aluno estabelece uma comparação com as duas primeiras funções, nas quais o valor de *a* é positivo. Mas mais significativa é a forma como justifica a refutação da sua conjectura, relacionando a paridade da função apresentada com os limites do gráfico no infinito.

Síntese. António revela facilidade em observar regularidades em casos particulares. Mostra também facilidade em generalizar as regularidades que encontra e em formular conjecturas. De forma análoga, apresenta facilidade em testar as conjecturas formuladas e, com base nesses testes, validá-las ou refutá-las. Em qualquer caso tenta sempre apresentar uma justificação que lhe pareça aceitável.

6. Conclusão

De seguida, sintetizamos os processos de raciocínio utilizados por António antes e depois da unidade de ensino e analisamos a possível relação entre os processos de raciocínio que utiliza no final com as experiências de aprendizagem proporcionadas pela unidade.

No que se refere às relações entre objectos, antes da unidade de ensino, António revela capacidade para interpretar e compreender problemas que podem ser traduzidos por funções, relacionando-os com o respectivo contexto. No que se refere ao trabalho com as diferentes representações de funções, o aluno também apresenta alguma facilidade. Interpreta de forma adequada a informação dada por funções representadas de forma gráfica e verbal e faz a conversão da forma verbal para a numérica e para a gráfica. Revela, no entanto, dificuldades, na conversão da representação gráfica para a algébrica, indiciando dificuldades no trabalho com expressões algébricas, bem como no seu significado. Estas dificuldades na manipulação algébrica e na sua ligação com outras representações vão ao encontro do que refere Kaput (1989) sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra. Nesta fase do estudo, o aluno apresenta dificuldades na ligação da representação algébrica com outras formas de representar funções, parecendo que esta forma de representação se encontra compartimentada (na terminologia de Duval, 2002), à semelhança do que aconteceu no estudo de Elia et al. (2006).

Durante a leccionação da unidade de ensino, António continua a revelar aptidão para interpretar e compreender problemas com funções, estabelecendo a sua relação com os respectivos contextos. Relativamente ao trabalho com as diferentes representações de funções, bem como com a conversão entre elas, revela um bom desempenho. As dificuldades que manifesta inicialmente com a representação algébrica de funções vão-se dissipando ao longo a unidade. Aliás, supera essas dificuldades nas primeiras aulas, quando compreende o significado das expressões algébricas (quer em termos gráficos, quer do contexto dos problemas). O aluno revela também compreender as situações em que cada forma de representação é mais vantajosa.

Depois da unidade de ensino, António revela aptidão para interpretar e compreender os problemas, estabelecendo relação com o significado que tomam no seu contexto. Revela, ainda, capacidade para trabalhar com várias formas de representação de funções, destacando-se a destreza com que trabalha com as diversas formas de representar funções, convertendo-as e compreendendo o significado dos valores que constituem as expressões algébricas e a sua relação com os pontos relevantes do gráfico.

Assim, no que se refere às relações entre objectos, no trabalho com as diferentes representações de funções, António parece ter beneficiado com as tarefas realizadas durante a unidade de ensino. O trabalho simultâneo das diferentes representações durante a discussão das tarefas, parece ter contribuído para a compreensão de todas elas, bem como para a conversão entre si, permitindo deste modo uma melhor compreensão dos problemas com funções, como é apontado por Duval (2002).

Vejamos, de seguida o raciocínio na resolução de problemas. Antes da unidade de ensino, António revela já facilidade em definir estratégias para resolver problemas com funções. As estratégias que usa são comuns e baseiam-se na procura de regularidades, identificando o produto constante na proporcionalidade inversa e simetrias em figuras. Na aplicação das estratégias definidas, António não apresenta dificuldades. Contudo, não mostra preocupação em verificar as soluções obtidas na resolução dos problemas, reflectir sobre elas ou apresentar uma justificação.

Durante a unidade de ensino, o aluno continua a revelar facilidade em definir estratégias de resolução de problemas com funções e começa a manifestar preocupação em justificar a estratégia utilizada e reflectir sobre as soluções obtidas nos problemas. Revela um bom desempenho na aplicação de estratégias, sejam elas de resolução numérica, gráfica ou algébrica. António recorre com mais frequência a estratégias de resolução algébricas, no entanto, quando necessário, utiliza estratégias de resolução gráfica. Não revela qualquer dificuldade na utilização da calculadora gráfica, mas manifesta preferência por estratégias de resolução algébrica.

Após a unidade, António revela ser capaz de definir e aplicar estratégias de resolução de problemas com funções. As estratégias que usa são: (i) recurso a famílias de funções; (ii) resolução gráfica; (iii) por tentativas; (iv) recurso ao modelo da proporcionalidade, para identificar relações em figuras geométricas; e (v) manipulação algébrica, com transformação simultânea de expressões. O aluno revela destreza nos cálculos necessários para a aplicação da estratégia definida, no trabalho com as expressões algébricas e na utilização da calculadora gráfica e revela preocupação em justificar a estratégia definida e em reflectir no sentido das suas respostas.

A unidade de ensino parece ter contribuído para as mudanças que se verificaram. Na verdade, as discussões e reflexões finais de cada tarefa tinham também o intuito de alargar o tipo de estratégias dos alunos, fazendo com que reflectissem não só no modo como resolveram o problema, mas também nas estratégias utilizadas pelos colegas. Neste aspecto, parece que António alarga o tipo de estratégias a utilizar, beneficiando com a resolução de problemas contextualizados através dos quais atribuiu significado aos entes matemáticos que constituem as expressões algébricas. A elaboração de relatórios relativos à exploração das tarefas, bem como as apresentações orais e discussões em turma parecem ter contribuído para a sua preocupação em reflectir nas respostas obtidas na resolução de um problema, bem como na justificação da estratégia utilizada para essa resolução.

Finalmente, no que respeita ao raciocínio na realização de tarefas de investigação, antes da unidade de ensino, António revela já capacidade para formular conjecturas, testá-las e formalizá-las. Apresenta facilidade em explorar alguns casos particulares, organizando-os e procurando encontrar regularidades, aspectos do raciocínio indutivo sublinhados por Pólya (1954) como de grande importância para a aprendizagem da Matemática.

Durante a unidade, o aluno mostra capacidade para explorar casos particulares e observar regularidades. O teste e a justificação de conjecturas é também uma preocupação constante. O aluno revela, também, facilidade em formular, testar e confirmar ou refutar conjecturas, para além de uma tendência para as formalizar algebricamente, justificando sempre o seu raciocínio.

Após a unidade de ensino, António continua a identificar facilmente regularidades nos casos que lhe são apresentados e a formular conjecturas. De igual forma, apresenta facilidade em testar, validar ou refutar as conjecturas formuladas, justificando sempre o seu raciocínio. Para além desta facilidade, tenta sempre procurar outros aspectos nos casos que explora, no sentido de realizar novas descobertas.

Também neste caso a unidade de ensino parece ter contribuído para a evolução de António. Na verdade, as tarefas de exploração de famílias de funções, com recurso à calculadora gráfica parecem ter contribuído para o desenvolvimento das capacidades de explorar casos particulares, procurar regularidades, formular conjecturas, testá-las, generalizá-las e confirmá-las ou refutá-las. A calculadora gráfica facilitou a pesquisa, incentivando o aluno nessa tarefa, sendo a justificação das conjecturas formuladas o aspecto em que se observam melhorias mais consideráveis.

Deste modo, em termos gerais, a resolução de problemas contextualizados parece ter contribuído para uma melhor compreensão do processo de resolução destes problemas e para a atribuição de significado aos entes matemáticos que surgem nas expressões algébricas. Assim, os problemas contextualizados parecem ter contribuído para uma aprendizagem, com significado, das funções.

O trabalho com as diversas representações durante a discussão das tarefas parece ter ajudado à compreensão de todas delas, bem como para o desenvolvimento da capacidade de fazer conversões entre elas, conduzido a uma melhor compreensão dos problemas com funções. Além disso, a calculadora gráfica permitiu a confrontação constante das várias formas de representar funções, o que parece ter contribuído para uma melhor compreensão das funções e das suas propriedades.

As discussões e reflexões no final de cada tarefa enriqueceram as estratégias de António, permitindo-lhe reflectir não só no modo como resolveu o problema, mas também conhecer as estratégias utilizadas pelos colegas. Estas reflexões parecem, portanto, ter contribuído para a clarificação do pensamento intuitivo e para a sua formalização e abstracção. A elaboração de relatórios relativos às tarefas, bem como as apresentações orais e discussões parecem ter contribuído para que passasse a reflectir nas suas respostas aos problemas, bem como na justificação das suas estratégias. Contribuíram, assim, para o desenvolvimento das capacidades de comunicar matematicamente e de raciocinar justificando os processos usados.

Este estudo sugere, assim, que a realização de tarefas diversificadas de investigação e problemas, contextualizadas e não contextualizadas, usando a calculadora gráfica, acompanhadas de oportunidades de discussão e reflexão colectiva podem contribuir de modo muito significativo para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos no estudo das funções no ensino secundário.

Referências

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(2), 1-16.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A., & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5,* 33-556.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: DEFCUL.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds), *The roles of representation in school mathematics (NCTM Yearbook)* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134**.**

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics, 46*, 187-228.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age.

Mevarech, Z. R., & Kramarsky, B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: Stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 229-263.

Ministério da Educação (2001). *Matemática A – 10.º ano*. Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias, Ciências Sócio-Económicas. Lisboa: DES.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês em 2000).

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs.* (Doctoral dissertation, University of Georgia). Lisboa: APM.

Russel, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook)* (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Sternberg, R. J. (1999). The nature of mathematical reasoning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook)* (pp. 37-44). Reston, VA: NCTM.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

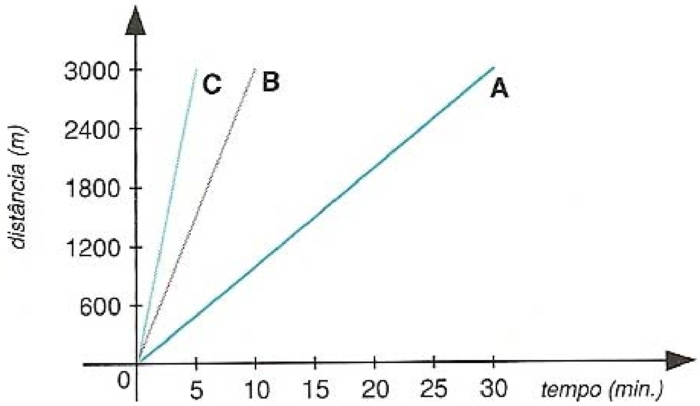
Anexo 1 – Planificação da unidade

<table>
<tr><th colspan="3">1.º Período (17 aulas de 90 minutos previstas para o tema):</th></tr>
<tr><th>Desenvolvimento do tema</th><th>Tarefas previstas</th><th>Nº de aulas de 90’</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Generalidades sobre funções:
▪ Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.</td><td>▪ Tarefa 1 – Um velho problema de optimização, de Euclides (concretização e discussão)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>▪ Problemas do manual sobre interpretação de gráficos, que descrevem situações da vida real.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>▪ Tarefa de exploração e imitação de gráficos, utilizando sensores.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>▪ Exercícios e problemas do manual sobre o conceito de função.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>▪ Problema do manual: uma situação real que visa a exploração das potencialidades da calculadora gráfica.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>▪ Tarefa 2 - O volume das caixas (concretização e discussão)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>▪ Exercícios e problemas do manual sobre as propriedades das funções e dos seus gráficos.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>▪ Exercícios e problemas do manual sobre a função afim.</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Função quadrática:
▪ Estudo intuitivo de propriedades das funções quadráticas e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, recorrendo à análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos e às transformações simples de funções.</td><td>▪ Tarefa 3 - Investigando famílias de funções quadráticas (concretização e discussão)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>▪ Exercícios e problemas do manual adoptado sobre a função quadrática.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Tarefa 4 - À volta com investigações de funções quadráticas (concretização e discussão)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>▪ Problemas do manual sobre funções quadráticas.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>▪ Tarefa de modelação de uma função quadrática, utilizando sensores.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>▪ Tarefa 5 – O triângulo de maior área (concretização e discussão)</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Teste de avaliação</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">2.º Período (19 aulas de 90 minutos previstas para o tema):</th></tr>
<tr><th>Desenvolvimento do tema</th><th>Tarefas propostas</th><th>Nº de aulas de 90’</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Função módulo:
▪ Estudo intuitivo de propriedades da função módulo e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, recorrendo à análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos e às transformações simples de funções.</td><td>▪ Tarefa 6 – Investigando transformações de funções (concretização e discussão)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>▪ Exercícios e problemas do manual sobre funções definidas por ramos, incluindo a função módulo.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>▪ Exercícios e problemas do manual sobre transformações simples de funções.</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Funções polinomiais de grau superior a dois:
▪ Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (com particular incidência nos graus 2, 3 e 4).
▪ Decomposição de um polinómio em factores em casos simples, por divisão dos polinómios e recorrendo à regra de Ruffini. Justificação desta regra.</td><td>▪ Tarefa 7 – Investigando funções cúbicas (concretização e discussão)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>▪ Exercícios e problemas do manual sobre operações com polinómios.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>▪ Tarefa 8 - Explorando gráficos de uma função (concretização e discussão)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>▪ Exercícios e problemas do manual sobre funções polinomiais.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Tarefa 9 – Investigando mais funções polinomiais (concretização e discussão)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>▪ Exercícios e problemas do manual envolvendo funções.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Tarefa 10 – Triângulos em quadrados (concretização e discussão)</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">▪ Teste de avaliação</td><td>1</td></tr>
</table>

Anexo 2 - Tarefa da 1.ª entrevista

1. O André, o Jorge e o Miguel moram no mesmo prédio e andam na mesma escola. De casa para a escola seguem o mesmo caminho, mas o André vai de mota, o Jorge vai a pé e o Miguel vai de bicicleta.



1.1. Que distância percorrem até chegar à escola?

1.2. Qual dos gráficos representa a ida de cada um deles para a escola?

1.3. Quanto tempo demora o Miguel a chegar à escola?

1.4. Designando por d a distância percorrida e por t o tempo gasto, indica, no caso do André, uma expressão que relacione as duas variáveis.

1.5. Estas relações correspondem a uma proporcionalidade directa? Porquê?

Adaptado de "Exercícios, problemas e actividades, Matemática 8, Edições Contraponto"

2. No dia de anos do Raul, os seus amigos compraram uma prenda, sem saber ainda qual o número dos que queriam participar. A tabela seguinte relaciona esse número (***n***) com a quantia que cabe a cada um (***q***).

n	2	3	5		12
q	18 €			3,60 €	

2.1. Completa a tabela.

2.2. Existe algum tipo de proporcionalidade entre ***n*** e ***q***?

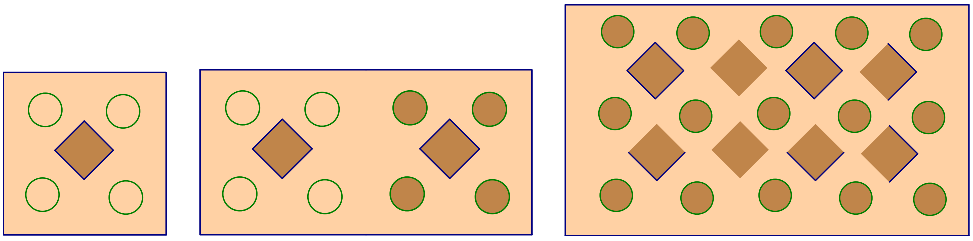
2.3. Escreve uma expressão que permita obter ***q*** em função de ***n***.

2.4. Como prevês que seja o aspecto gráfico da relação entre ***n*** e ***q***?

Adaptado de "Matemática 9, A folha cultural"

3. Um Sortido de Bombons encontra-se distribuído do seguinte modo: um caramelo situa-se sempre no centro de quatro chocolates, como mostra a figura abaixo.

As dimensões da caixa fornecem o número de colunas e filas de chocolates existentes.



2×2 2×4 3×5

3.1. Quantos caramelos existirão numa caixa de dimensões 4×6?

3.2. Descobre um método para determinar o número de caramelos existentes em qualquer caixa, desde que sejam conhecidas as suas dimensões.

Adaptado de "Princípios e normas para a Matemática escolar, NCTM"

4. Considera a família de funções definidas por $f(x) = ax + a$, com $a \in$ IR.

4.1. Indica as coordenadas do ponto de abcissa 3 pertencente ao gráfico da função $f(x) = 2x + 2$.

4.2. Como prevês o aspecto gráfico desta função?

4.3. Quando $x = 0$, qual o ponto pelo qual passam os gráficos das funções definidas por $f(x) = ax + a$?

4.4. Os gráficos das funções definidas por $f(x) = ax + a$ passam todos por um mesmo ponto. Quais as coordenadas desse ponto?

Anexo 3 - Tarefa da 2.ª entrevista

1. Nesta questão é proposta uma exploração de funções quadráticas.

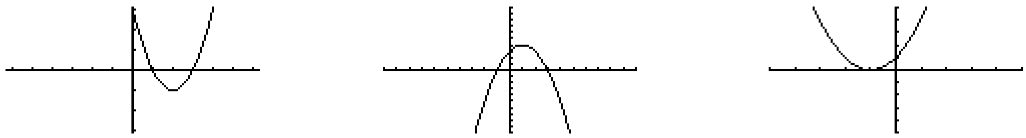
1.1. Representa graficamente a função $y = (x - 1)\ (x + 5)$.

1.2. Qual o significado de 1 e - 5 relativamente ao gráfico?

1.3. Investiga os gráficos das funções da família $y = (x + a)(x + 1)$.

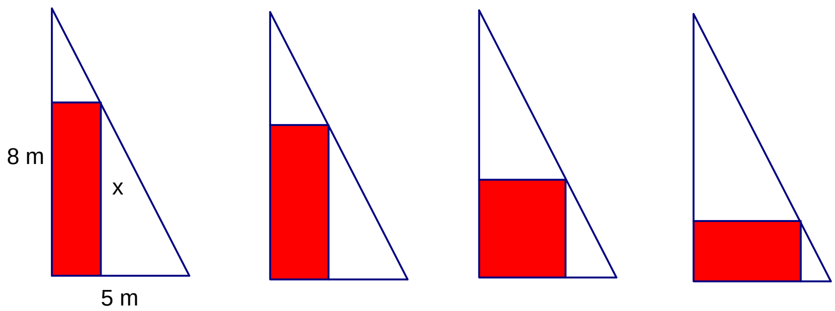
1.4. Qual o significado de *a* relativamente ao gráfico?

1.5. Define, através das suas expressões analíticas, funções que correspondam aos seguintes gráficos:



Adaptado de “Funções 10.º ano, DES”

2. O Tiago possui um barco à vela. A vela que o equipa tem a forma de um triângulo rectângulo cujos catetos medem 8m e 5m. Para que esta vela se veja ao longe, ele decidiu colocar-lhe no interior um rectângulo vermelho. Fez diferentes estudos e o seguinte esquema:



2.1. Mostra que a área de qualquer dos rectângulos é dada por $A(x) = 10 - \frac{5}{8}(x-4)^2$.

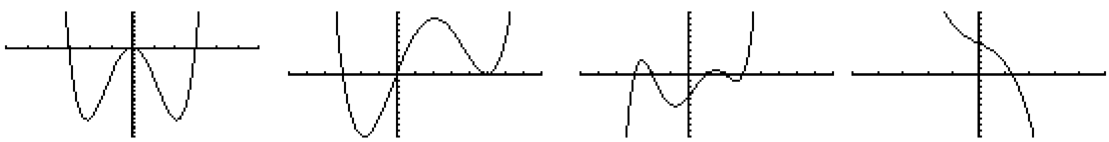
2.2. Que valores pode tomar *x*?

2.3. Quais são as dimensões do rectângulo de área máxima?

2.4. Que valor deve ter *x* para que a área do rectângulo não seja inferior a 8 metros quadrados?

Adaptado de “Infinito 10A, Areal Editores”

3. As seguintes representações gráficas correspondem a funções polinomiais de grau inferior a 6 cujos coeficientes são todos números inteiros. Indica uma expressão analítica de uma função que possa corresponder a cada um deles. Explica, em cada caso, o teu raciocínio, regista cada tentativa que fizeres e, no caso do gráfico encontrado não coincidir com o gráfico dado, procura encontrar uma explicação.



Adaptado de “Funções 10.º ano, DES”